Plan du cours

1. **Introduction + Calcul différentiel**
2. **Exercices de Calcul différentiel (3h de TD)**
3. **Théorie générale des ED :** $x'(t) = f(x(t))$
4. **Cas linéaire autonome :** $x'(t) = Ax(t)$
5. **Linéarisation & ED linéaires non autonomes :**
   $\delta x' = Df(x(t)) \cdot \delta x$ **&** $x'(t) = A(t)x(t)$
6. $\boxed{\textbf{Équilibres et stabilité,}}$
   $x' = f(x)$ **vs** $\delta x' = Df(x_0) \cdot \delta x$

Rappels

- Examen final = écrit (3h) sans documents
  sauf <u>**une**</u> feuille manuscrite
  Date de l'examen : mardi 8 novembre matin
- Évaluations sur Synapses ? ? ?
- Page web du cours :
  `https://3w2.ensta.fr/~dfr/Cours/index.php?usebdd=ensta&sigle=AO102`
- Pour me contacter :
  - dans mon bureau (N^0 2.4.25, UMA)
  - par email `Frederic.Jean@ensta-paristech.fr`

Plan de la séance

1. Stabilité des équilibres
2. Stabilité et linéarisation
3. Un exemple : le pendule avec frottements
4. Fonctions de Lyapunov

Équilibres et stabilité

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad (ED)$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

<u>Déf.</u> $x_0 \in \Omega$ **équilibre** si $x(\cdot) \equiv x_0$ solution de (ED)

$\iff \quad f(x_0) = 0$

<u>Question :</u> comportement des solutions autour de x_0 ?

Notions de stabilité

Not^{o} : $\quad x_v(\cdot) \; = \;$ sol. maximale de (ED) t.q. $x_v(0) = v$

Soit $x_0 \in \Omega$ un équilibre.

- x_0 est **stable** si : $\forall\, \varepsilon > 0, \; \exists\, \delta > 0$ tel que

$$\|v - x_0\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_v(t) - x_0\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

- x_0 est **asymptotiquement stable** si :

$$x_0 \text{ stable et il existe } V = \mathrm{Vois}(x_0) \text{ t.q.}$$

$$v \in V \qquad \Longrightarrow \qquad x_v(t) \longrightarrow x_0 \quad \text{quand } t \to +\infty$$

Exemple : Champ linéaire $f(x) = Ax, \;\; x \in \mathbb{R}^n$

$$\longrightarrow \quad 0 \;\; \text{équilibre de} \;\; x' = Ax$$

Théorème

- *0 asymptotiquement stable*

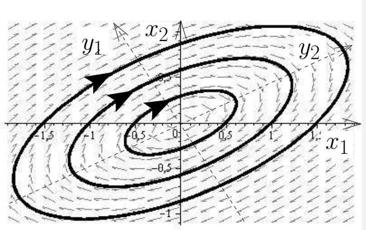
$$\Longleftrightarrow \qquad \Re e(\lambda) < 0 \;\; \textit{pour toute val. propre } \lambda \textit{ de } A$$

- *Il existe une val. propre λ de A t.q. $\Re(\lambda) > 0$,*

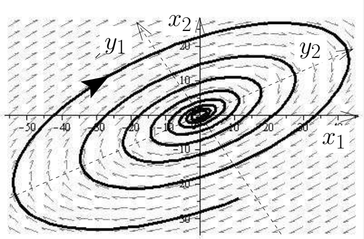
$$\Longrightarrow \qquad 0 \;\; \textit{non stable}$$

Quand les v.p. de A sont de $\Re e \leq 0$, 0 peut être :

- stable, mais pas asymptotiquement ($A|_{E^c}$ diagonalisable) ;
- non stable ($A|_{E^c}$ non diagonalisable).



Équilibre **stable** mais PAS asymptotiquement stable$(\Re e(\lambda_1) = \Re e(\lambda_2) = 0)$



Équilibre **asymptotiquement stable** $(\Re e(\lambda_1) = \Re e(\lambda_2) < 0)$

Plan de la séance

Stabilité et linéarisation

Soit $x_0 \in \Omega$ équilibre de (ED) : $x'(t) = f(x(t))$

- Principe : *en général* (mais pas toujours !!),

comportement de (ED) en x_0	$\approx$	comportement du linéarisé en 0

- Éq. linéarisée autour de $x(\cdot) \equiv x_0$:

$$y'(t) = Df(x_0) \cdot y(t) \qquad \text{(ED linéaire } \textbf{autonome}\text{)}$$

$\longrightarrow$ stabilité caractérisée par val. propres de $Df(x_0)$.

Théorème

- *Si $\Re e(\lambda) < 0$ pour toute val. propre λ de $Df(x_0)$ alors x_0 asymptotiquement stable.*
- *Si il existe une val. propre λ de $Df(x_0)$ t.q. $\Re e(\lambda) > 0$, alors x_0 non stable.*

Attention : stabilité pas toujours déterminée par le linéarisé :

on peut avoir $Df_1(x_0) = Df_2(x_0)$ alors que

$$x_0 = \text{équilibre} \begin{cases} \text{asymptotiquement stable pour } x' = f_1(x) \\ \text{non stable pour } x' = f_2(x) \end{cases}$$

Déf. x_0 équilibre **hyperbolique** si
$\Re e(\lambda) \neq 0$ pour toute val. propre λ de $Df(x_0)$

Théorème (Hartman–Grobmann)

Soit x_0 équilibre hyperbolique. Alors

portrait de phase de $x' = f(x)$ au vois. de x_0 C^0-équivalent à portrait de phase de $y' = Df(x_0) \cdot y$ au vois. de 0

Plan de la séance

Pendule avec frottements

$$\theta'' = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - \alpha\theta' \qquad \alpha > 0$$

$$\iff \qquad x' = f(x) \qquad \text{avec} \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

- Équilibres : $x_s = (0,0)$ et $x_u = (\pi, 0)$ $[x_1 \bmod 2\pi]$
- Différentielle : $Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos x_1 & -\alpha \end{pmatrix}$

Linéarisé en $x_u = (\pi, 0)$: $\qquad Df(x_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\alpha \end{pmatrix}$

$\det Df(x_u) = -\frac{g}{\ell} < 0$

$\implies$ 2 valeurs propres réelles, de signes opposés

Conclusion : x_u équilibre non stable.

[Hart.-Gr. $\Rightarrow$] De plus, il existe deux orbites stables.

Linéarisé en $x_s = (0, 0)$: $\qquad Df(x_s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \operatorname{tr} Df(x_s) &= -\alpha < 0 \\ \det Df(x_s) &= \frac{g}{\ell} > 0 \end{cases}$$

$\implies$ 2 valeurs propres de partie réelle < 0

Conclusion : x_s équilibre asymptotiquement stable.

Cas de frottements importants

$$\theta'' = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - \alpha\theta'^3$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \alpha x_2^3 \end{pmatrix}, \qquad Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos x_1 & \boxed{-3\alpha x_2^2} \end{pmatrix}$$

- Mêmes équilibres : $x_s = (0,0)$ et $x_u = (\pi, 0)$
- Linéarisé en $x_u = (\pi, 0)$: $\qquad Df(x_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$

val. propres $= \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \implies \qquad x_u$ équilibre non stable

- **Linéarisé en $x_s = (0,0)$:** $\quad Df(x_s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$

val. propres $= \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell}} \implies$ **? ?** (x_s non hyperbolique)

MAIS système dissipatif $\implies$ l'énergie E décroît.

Or $\quad E(\theta,\theta') = \frac{1}{2}m\ell^2\theta'^2 + V(\theta)$, avec $V(\theta) = -mg\ell\cos\theta$,

a pour unique minimum $x_s = (0,0)$

$\longrightarrow$ toute solution tend vers x_s, c-a-d x_s asymptotiq^{t} stable

Plan de la séance

Fonctions de Lyapunov

Soit $x_0 \in \Omega$ équilibre de (ED) : $x'(t) = f(x(t))$.

Déf : Soient $U = \mathrm{Vois}(x_0) \subset \Omega$ et $L : U \to \mathbb{R}$ continue.

L **fonction de Lyapunov en** x_0 si :

(a) $L(x) > L(x_0)$ pour $x \neq x_0$ dans U ;

(b) pour toute sol. $x(\cdot)$, $t \mapsto L(x(t))$ décroissante.

L **fonction de Lyapunov stricte** en x_0 si de plus :

(c) pour tte sol. $x(\cdot) \not\equiv x_0$, $t \mapsto L(x(t))$ strictement décroissante

Remarque : Si L différentiable,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(x(t)) &= \frac{\partial L}{\partial x_1}(x(t))\, x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x(t))\, x_n'(t) \\ &= \Big\langle \nabla L(x(t))\, ,\, f(x(t)) \Big\rangle \end{aligned}$$

$\implies$ on peut remplacer (b) par

$(b)'$ $\quad \langle \nabla L(x)\, ,\, f(x) \rangle \leqslant 0 \quad$ pour tout $x \in U$

et (c) par

$(c)'$ $\quad \langle \nabla L(x)\, ,\, f(x) \rangle < 0 \quad$ pour tout $x \in U$, $x \neq x_0$

Théorème

Soit x_0 équilibre.

- *Si il existe une fonction de Lyapunov en x_0,*
  alors x_0 stable.
- *Si il existe une fonction de Lyapunov stricte en x_0,*
  alors x_0 asymptotiquement stable.

Déf. Soit x_0 équilibre asymptotiquement stable.

Bassin d'attraction de x_0 :

$$B(x_0) = \{ v \in \Omega \ : \ x_v(t) \longrightarrow x_0 \ \text{quand } t \to +\infty \}.$$

Proposition

Supposons $L : U \to \mathbb{R}$ fn de Lyapunov stricte en x_0.

- Si $\phi_t(U) \subset U \ \ \forall t \geq 0$ et $U \subset \Omega$ compact,
  $$U \subset B(x_0).$$
- Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^n$ et $\lim_{\|x\| \to \infty} L(x) = +\infty$, alors
  $$B(x_0) = \mathbb{R}^n.$$

[équilibre globalement asymptotiquement stable]